

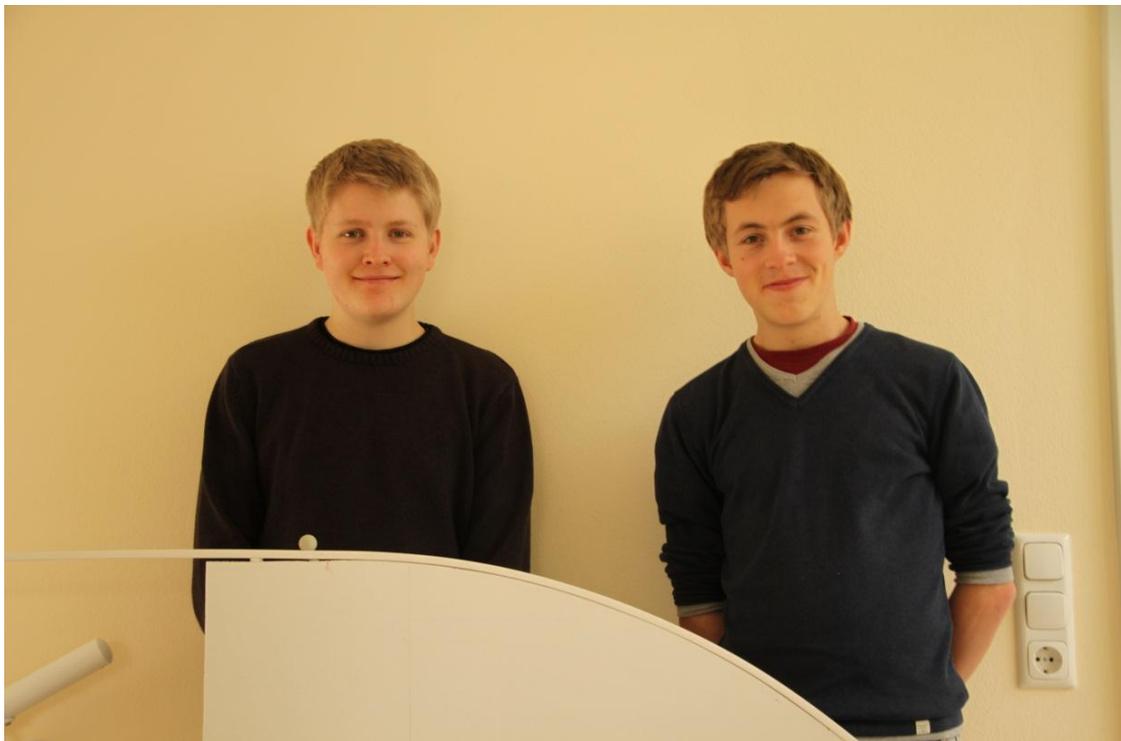
Untersuchung zum Abheben eines Körpers auf einer abschüssigen Bahn

Jugend forscht 2015

Mathurin Choblet & Christian Hufnagel

Betreuer: Dr. Friedemann Graubner

14.01.2015



Inhalt

1	Einleitung	3
2	Theorie	3
2.1	Allgemeine Theorie.....	3
2.1.1	Normalbeschleunigung	3
2.1.2	Krümmung.....	4
2.1.3	Zentrifugalbeschleunigung.....	4
2.1.4	Geschwindigkeit an einem Punkt der Bahn	4
2.1.5	Zusammenführen zur Abhebebedingung	5
2.1.6	Zusammenhang zwischen Rotationsenergie und Translationsenergie	7
2.2	Berechnung der Abhebestellen für bestimmte Bahnkurven	7
2.2.1	Kreis.....	7
2.2.2	Parabelbahn	9
2.2.3	Kubische Parabel	10
3	Bahnenbau	10
3.1	Die flexible Bahn (Kunststoff)	10
3.2	Die feste Bahn (kubische Parabel).....	11
3.3	Die feste Bahn (Kreis)	11
4	Messverfahren	11
4.1	Geschwindigkeitsmessung.....	11
4.2	Methoden zur Bestimmung der Abhebestelle	12
4.2.1	Methode der subjektiven Wahrnehmung.....	12
4.2.2	Videoaufnahmen	12
4.2.3	Stromkreis	12
4.2.4	Geräusch.....	13
4.2.5	U-Brücke	13
4.2.6	Fotos.....	13
4.2.7	Stroboskopische Aufnahmen	13
5	Experimente	14
5.1	Kreisbahn	14
5.1.1	Aufnahmen mit Stroboskop und Kamera.....	15
5.2	Parabelbahn.....	15

5.3	Kubische Parabelbahn	15
6	Evaluation.....	16
6.1	Auswertung.....	16
6.2	Reflexion	17
7	Danksagung.....	17
8	Literaturverzeichnis	17
9	Bildquelle	17

1 Einleitung

Die Idee zur Beschäftigung mit dem Thema kam mir, Christian Hufnagel, durch zwei Einflüsse:

Einerseits behandelten wir in der zehnten Klasse die gleichförmige Kreisbewegung und eine Aufgabe war es gewesen, wie schnell man ein durch einen Faden gehaltenes Drehsystem bewegen kann, ohne den Faden zum Zerreißen zu bringen. Ich stellte mir daraufhin die Frage, wie es sich verhält, wenn die Zentripetalkraft auf andere Weisen zustande kommt. Wir rechneten auch Aufgaben, in denen die Zentripetalkraft durch die Gravitation zustande kommt. Unter anderem konnte so rein rechnerisch angegeben werden, ob ein Looping überhaupt möglich ist und zum Beispiel von dem Fahrzeug einer Achterbahn durchfahren werden kann.

Auch interessierte mich, wann zum Beispiel ein Skispringer von der Schanze abhebt und ob man diesen Zeitpunkt auch errechnen könnte. Jedoch hatte ich keine Idee, wie sich die Fliehkräfte auf einer beliebigen Bahn mathematisch beschreiben ließen.

Den nächsten Schub erhielt meine Neugier durch den Besuch des Tages der Mathematik, der damals von allen Leistungskursen meines Jahrganges besucht wurde. Da ich nicht wirklich wusste, wohin ich gehen sollte, besuchte ich auf gut Glück eine Vorlesung über „Krümmung in der Physik“. In dieser Vorlesung wurde die Krümmung selbst, von der ich als mathematische Größe vorher überhaupt nichts gehört hatte, die Formel für die Krümmung sowie deren Beziehung zum Krümmungskreis erwähnt. Damit hatte ich rein zufällig den Ansatz für die Lösung des Skispringerproblems gefunden, verfolgte diesen jedoch nicht alleine weiter, da die Mathematik sehr schnell kompliziert wird und Kenntnisse fordert, die einem Oberstufenschüler nicht offenstehen.

Bei der Suche nach einem Thema für Jugend Forscht machte ich unserem Betreuer den Vorschlag, dieses Problem näher zu untersuchen und die Ergebnisse durch Experimente zu untermauern.

Meinen Mitschüler Mathurin Choblet konnte ich für dieses Jugend-forscht-Projekt gewinnen.

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob, sowie wann und wo ein durch die Gravitation beschleunigter und gehaltener Körper, der sich auf einer vorgegebenen Bahn bewegt, diese verlässt. Wie kann man dies überhaupt experimentell überprüfen? Welche Größen sind überhaupt beteiligt? Wie misst man diese? Auf welche Gebiete der Mechanik muss zurückgegriffen werden, um das Problem angehen zu können?

2 Theorie

2.1 Allgemeine Theorie

2.1.1 Normalbeschleunigung

Die Normalbeschleunigung a_N ist diejenige Komponente der Erdbeschleunigung \vec{g} , die senkrecht auf der Bewegungsrichtung der Position des sich bewegenden Objektes steht. Man erhält sie durch Aufspaltung der Erdbeschleunigung. Aus der Skizze ergibt sich:

$$a_N = \cos(\alpha) \cdot g$$

Für α gilt wiederum mit der Steigung m der Tangente:

$$\arctan(|m|) = \alpha$$

$$\Rightarrow a_N = \cos(\arctan(|m|)) \cdot g$$

mit $\cos(\arctan(m)) = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$ folgt:

$$\Rightarrow a_N = \frac{1}{\sqrt{m^2+1}} \cdot g$$

2.1.2 Krümmung

Die Krümmung κ ist ein Maß, das angibt, wie stark eine Kurve an einer Stelle von einer Geraden abweicht. Der Zahlenwert der Krümmung ist der Kehrwert des Radius r des Krümmungskreises, des Kreises, der die Kurve an dieser Stelle am besten annähert, ähnlich einer Tangente. Die Formel wird ähnlich zur Definition der Ableitung als Grenzwert entwickelt, darauf kann hier nicht eingegangen werden. Es ergeben sich folgende Formeln:

$$\kappa = \frac{1}{r}$$

und für die Darstellung als Graph einer Funktion $y(x)$:¹

$$\kappa(x) = \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{(y'(x))^2 + 1}\right)^3}$$

2.1.3 Zentrifugalbeschleunigung

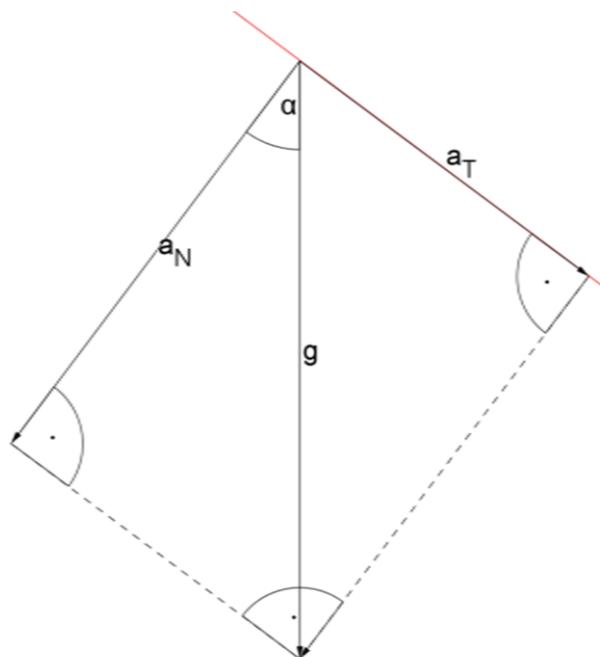
Die Zentripetalbeschleunigung ist die Beschleunigung, die bewirkt, dass sich ein Körper auf einer von einer Geraden abweichenden Bahn bewegt. Aus Sicht des mitbewegten Beobachters wirkt auf diesen die betragsgleiche Zentrifugalbeschleunigung a_Z , die ihn „wegdrückt“. Ein Körper hebt von der Bahn ab, wenn die Normalbeschleunigung kleiner als die Zentrifugalbeschleunigung wird.

Mit der Geschwindigkeit v gilt:

$$a_Z = \frac{v^2}{r} = \kappa v^2$$

2.1.4 Geschwindigkeit an einem Punkt der Bahn

Um die Geschwindigkeit des Objektes an einem Punkt der Bahn zu berechnen, kann auf Energiebetrachtungen zurückgegriffen werden.



Zerlegung der Erdbeschleunigung \vec{g}

¹ de.wikipedia.org/wiki/Krümmung

Es gilt allgemein unter Einbeziehung von rollenden Objekten mit der Winkelgeschwindigkeit ω :

$$E_{Gesamt} = E_{Kin} + E_{Rotation} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\Theta\omega^2$$

Das Trägheitsmoment Θ eines rotationssymmetrischen Körpers lässt sich allgemein als $\Theta = Pmr^2$ schreiben. Bei dieser Schreibweise ist m die Masse und r der Radius von der Drehachse bis zum Außenrand. Für eine rollende Kugel mit homogener Massenverteilung gilt dann zum Beispiel $P = \frac{2}{5}$ und $\Theta = \frac{2}{5}mr^2$, für einen rollenden Zylinder mit homogener Massenverteilung $P = \frac{1}{2}$ und $\Theta = \frac{1}{2}mr^2$ und für gleitende Objekte, wie zum Beispiel einem Gleiter auf einer Luftkissenbahn oder Skier, die nicht rotieren, $P = 0$.

Es werden Θ und für die Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{v}{r}$ eingesetzt, da bei einem rollenden Körper die Geschwindigkeit des Schwerpunktes gleich der Bahngeschwindigkeit außen am Körper ist.

$$E_{Gesamt} = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Pmr^2 \cdot \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{2}(1 + P)mv^2$$

Die potenzielle Energie der Kugel wird beim Herunterrollen in kinetische Energie umgewandelt.

$$\begin{aligned} E_{Kin} &= E_{Pot} \\ mgh &= \frac{1}{2}(1 + P)mv^2 \\ v &= \sqrt{\frac{2}{1 + P}gh} = \sqrt{Kgh} \end{aligned}$$

Zum einfacheren Rechnen wurde der Faktor K eingeführt: $K = \frac{2}{1 + P}$. Für eine Kugel gilt dann: $K = \frac{2}{1 + \frac{2}{5}} = \frac{10}{7}$, ein Gleiter hätte $K = 2$. Ein auf einer Ebene rollender Körper hat insgesamt die Energie $E = \frac{1}{K}mv^2$.

2.1.4.1 Mit einer Startgeschwindigkeit

Hat der rollende Körper vor dem Herunterrollen bereits eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 , so hat er die Anfangsenergie E_0 .

$$\begin{aligned} E_{Gesamt} &= E_0 + E_{Pot} \\ \frac{1}{K}mv^2 &= \frac{1}{K}mv_0^2 + mgh \\ v &= \sqrt{v_0^2 + Kgh} \end{aligned}$$

2.1.5 Zusammenführen zur Abhebebedingung

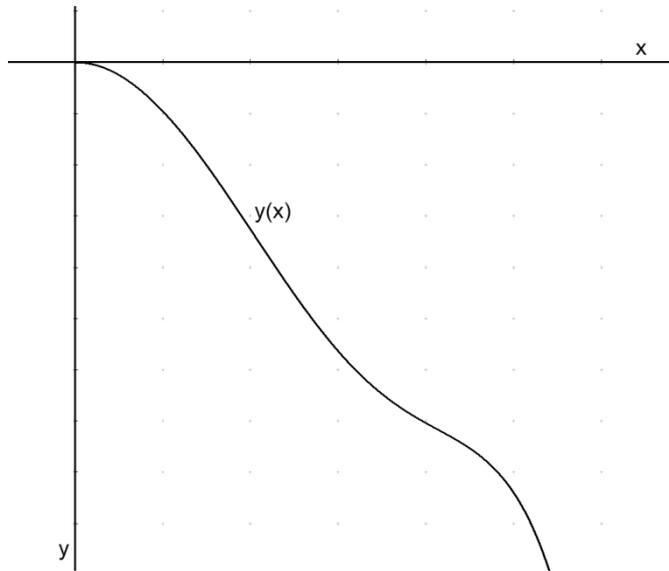
Damit ein Körper von der Bahn abhebt, muss die Zentrifugalbeschleunigung größer als die Normalbeschleunigung sein:

$$a_z > a_N$$

Einsetzen liefert:

$$v^2 \cdot \kappa > \frac{g}{\sqrt{m^2 + 1}}$$

Zum einfacheren Rechnen wird das Koordinatensystem so gewählt, dass die y-Achse nach unten zeigt.



Somit gelten $m = y'(x)$ und für die zurückgelegte Höhe $h = y(x)$. In die obige Formel wird zusätzlich noch die Krümmung (Abschnitt 2.1.2) eingesetzt:

$$(v(x))^2 \cdot \frac{y''(x)}{\left(\sqrt{(y'(x))^2 + 1}\right)^3} > \frac{g}{\sqrt{(y'(x))^2 + 1}} \quad | \cdot \left(\sqrt{(y'(x))^2 + 1}\right)^3$$

$$(v(x))^2 \cdot y''(x) > [(y'(x))^2 + 1] \cdot g$$

$v(x)$ einsetzen:

$$[v_0^2 + Kgy(x)] \cdot y''(x) > [(y'(x))^2 + 1] \cdot g$$

Dies ist die allgemeingültige Abhebebedingung. Interessant an dieser Gleichung ist, dass in ihr die Funktion selbst und ihre erste sowie zweite Ableitung vorkommen.

Diese Bedingung gilt nur für Funktionen $y(x)$ mit $y(0) = 0$, die monoton steigend sind.

2.1.5.1 Abhebebedingung mit Beschleunigungshöhe

Eine Geschwindigkeit v_0 erhielten die Kugeln in unseren Experimenten immer dadurch, dass sie durch eine Rampe einen Höhenunterschied h_0 zurücklegten und auf diese Art beschleunigt wurden.

Ihre Geschwindigkeit beträgt dann am Ende der Rampe nach der obigen Formel $v_0 = \sqrt{Kgh_0}$.

In die Abhebebedingung eingesetzt erhalten wir:

$$[Kgh_0 + Kgy(x)] \cdot y''(x) > [(y'(x))^2 + 1] \cdot g$$

Ausklammern und Kürzen ergibt dann:

$$K \cdot [h_0 + y(x)] \cdot y''(x) > (y'(x))^2 + 1$$

2.1.6 Zusammenhang zwischen Rotationsenergie und Translationsenergie

Für die meisten Experimente benutzen wir eine Kugel einer optomechanischen Computermaus. Diese bestand aus einem Eisenkern und einer Gummibeschichtung von ca. 2mm Dicke. Wir wählten diesen Kugeltyp, weil sie aufgrund ihrer guten Haftung im Gegensatz zu Stahlkugeln nicht auf der Bahn rutscht, sondern rollt. Da sie nicht homogen ist, dürfen wir nicht die Formel für das Trägheitsmoment einer Kugel ($P = \frac{2}{5}, K = \frac{10}{7}$) verwenden. Außerdem rollt unsere Kugel nicht auf einer Ebene, sondern in einer U-förmigen Vertiefung. Das heißt, ihre Rotationsenergie ist im Vergleich zu ihrer Translationsenergie größer als bei einer Kugel, die auf einer Ebene rollt. Diese Bedingungen können wir rechnerisch nicht genau erfassen. Deshalb bestimmten wir den für uns relevanten K -Wert experimentell.

Dazu maßen wir, wie lange die Kugel auf einer geraden, geneigten, schiefen Bahn mit besagter Vertiefung für eine bestimmte Länge s und einen bestimmten Höhenunterschied h benötigte.

Zunächst lässt sich die Beschleunigung der Kugel über $s = \frac{1}{2} * a * t^2$ ausdrücken. Mit $a = \frac{2s}{t^2}$ und $v = a * t$ erhält man $v = \frac{2s}{t}$.

Über den Energieerhaltungssatz kommen wir auf den für uns relevanten Wert von K .

$$E_{pot} = E_{kin} + E_{rot}$$
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \frac{4s^2}{t^2} + \frac{1}{2} \cdot m \cdot P \cdot \frac{4s^2}{t^2}$$
$$P = \frac{2 \cdot g \cdot h \cdot t^2}{4s^2} - 1$$

Für $h = 0,28m$ und $s = 2,62m$ erhielten wir aus 15 Messungen einen Mittelwert von $t = 2,89s$.

Daraus ergibt sich $P \approx 0,667$ und $K \approx 1,20$. Dieser Wert ist deutlich kleiner als der K -Wert für eine auf einer Ebene rollende Kugel von $K = \frac{10}{7} \approx 1,43$.

2.2 Berechnung der Abhebestellen für bestimmte Bahnkurven

2.2.1 Kreis

Erste Methode:

Ein Kreis mit Radius r und Mittelpunkt $(0|0)$ hat die Gleichung $x^2 + y^2 = r^2$. Damit der Startpunkt mit dem Ursprung unseres Koordinatensystems zusammenfällt, muss die nach y umgeformte Kreisfunktion noch um r in positiver y -Richtung verschoben werden.

$$y(x) = -\sqrt{r^2 - x^2} + r$$

Wir benötigen die erste und zweite Ableitung der Kreisfunktion ($x, y \geq 0$):

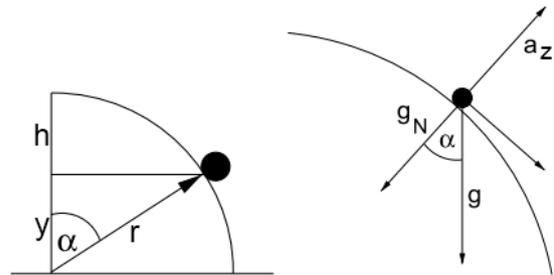
$$y'(x) = \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$
$$y''(x) = \frac{r^2}{(\sqrt{r^2 - x^2})^3}$$

In die Abhebebedingung aus Kapitel 2.1.5 setzen wir die Kreisfunktion, ihre Ableitungen und $v_0 = 0$ ein und erhalten nach einigen Umformungen, die wir aus Platzmangel nicht aufführen können,

$x_{Abhebestelle} = r \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{K}{K+1}\right)^2}$. Für $r = 1 \text{ m}$ und $K = 1,2$ ergibt sich $x_{Abhebestelle} = 0,838 \text{ m}$ und $y_{Abhebestelle} = 0,455 \text{ m}$, das heißt die Abhebestelle liegt $1 \text{ m} - 0,455 \text{ m} = 0,545 \text{ m}$ über dem Nullniveau des Viertelkreises. Die Rechnung, die zu diesem Ergebnis führt, haben wir auch mit dem Computerprogramm Derive überprüft.

Zweite Methode²:

Die Abhebestelle lässt sich auf einem weiteren Weg herleiten. Auch hier setzen wir Normal- und Zentrifugalbeschleunigung gleich. Jedoch lässt sich in der Formel für die Normalbeschleunigung (Abschnitt 2.1.1) der $\cos(\alpha)$ bei einem Kreis deutlich einfacher definieren: Anhand der Zeichnung wird der Zusammenhang $\cos(\alpha) = y/r$ deutlich (Achtung, y hat jetzt im Vergleich zur ersten Methode eine andere Bedeutung!). Auch die Zentrifugalbeschleunigung a_z ist einfacher anzugeben, da ein Kreis eine konstante Krümmung $\kappa = \frac{1}{r}$ hat.



$$a_n = a_z$$

$$\cos(\alpha) \cdot g = \frac{v^2}{r}$$

Man kann nun $\cos(\alpha) = y/r$ einsetzen und von Abschnitt 2.1.4 kennen wir bereits für einen rotierenden Körper mit $v_0 = 0$ die Geschwindigkeit $v = \sqrt{K \cdot g \cdot h}$.

In diesem Fall muss für die Berechnung der Geschwindigkeit die Höhe h verwendet werden und nicht y (siehe Zeichnung). Daraus folgt $v = \sqrt{K \cdot g \cdot (r - y)}$.

Man erhält:

$$\frac{y}{r} \cdot g = \frac{K \cdot g \cdot (r - y)}{r}$$

Umformen liefert:

$$y = \frac{r}{1 + \frac{1}{K}}$$

Nun setzt man ein: $r = 1 \text{ m}$ und $K = 1,2$ und erhält $y = 0,545 \text{ m}$ über Nullniveau.

Dies ist genau das Ergebnis der ersten Methode. Die Ergebnisse beider Berechnungen stimmen überein. Dies bestärkte unser Vertrauen in die von uns hergeleitete Abhebebedingung in Abschnitt 2.1.5.

² www-user.tu-chemnitz.de/~hgi/Ue-3-LB-WS%2003.pdf

2.2.2 Parabelbahn

Für die Parabel setzen wir an: $y(x) = ax^2$

Von der Funktionsgleichung benötigen wir nun die erste und die zweite Ableitung:

$$y'(x) = 2ax \text{ und } y''(x) = 2a$$

Eingesetzt in unsere Abhebedingung erhält man:

$$\left[v_0^2 + \frac{2}{1+p} gax^2 \right] 2a > [4ax^2 + 1] \cdot g \quad (\#)$$

Die Abhebestelle hängt von der Anfangsgeschwindigkeit v_0 und dem Parabelparameter a ab. Für einen Fall, wie wir ihn später praktisch austesten wollten, wählten wir $v_0 = 0 \text{ m/s}$ und $a = 1/\text{m}$.

$$\frac{4}{1 + 0,667} \cdot g \cdot x^2 > [4x^2 + 1m^2] \cdot g$$

$$2,4 \cdot x^2 > 4x^2 + 1m^2$$

Kein x erfüllt die Ungleichung, das heißt die Kugel hebt nicht ab, wenn wir sie im Scheitelpunkt starten. Mit dem Programm Turboplot untersuchen wir die Lösungen von (#) für $a = 1/\text{m}$ und $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ und verschiedene Anfangsgeschwindigkeiten als Parameter. Die rechte Seite der Ungleichung ist die Normalbeschleunigung, sie ist in der Abbildung schwarz eingezeichnet. Die linke Seite der Ungleichung ist die Zentrifugalbeschleunigung und farbig dargestellt. Abhebestellen entsprechen Schnittpunkten der schwarzen Kurve mit den farbigen Kurven, **vorausgesetzt die schwarze Kurve schneidet eine farbige Kurve von oben nach unten, denn nur in diesem Fall löst sich eine auf der Schiene rollende Kugel von der Bahn ab**. Wie man sieht, gibt es für keine der Geschwindigkeiten einen derartigen Schnittpunkt, das heißt die Kugel hebt entweder von Anfang an bei $x = 0$ oder überhaupt nicht ab. Für nicht rotierende, das heißt gleitende Körper, ist das sowieso plausibel, denn diese bewegen sich auf sogenannten Wurfparabeln. Da rotierende Körper im Vergleich langsamer sind, heben diese erst recht nicht ab.

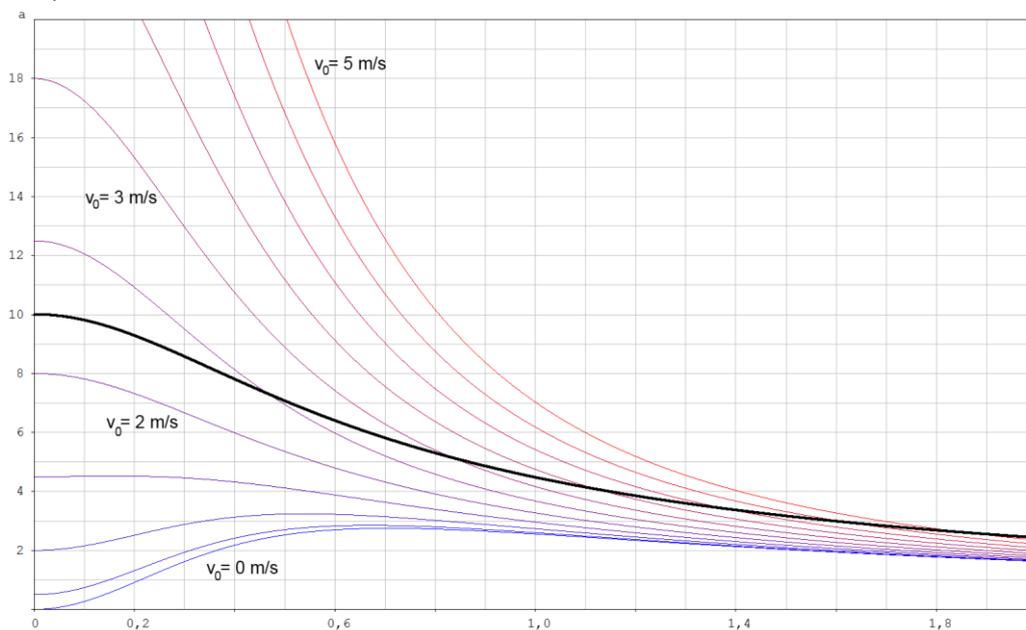


Abbildung: Zentrifugalbeschleunigung a_z (farbig) und Normalbeschleunigung a_N (schwarz) in Abhängigkeit von der x -Koordinate; Parameter ist die Anfangsgeschwindigkeit v_0 im Scheitelpunkt.

2.2.3 Kubische Parabel

Für eine kubische Parabel legen wir fest: $y(x) = ax^3$. Die Funktionsgleichung leiten wir zweimal ab.

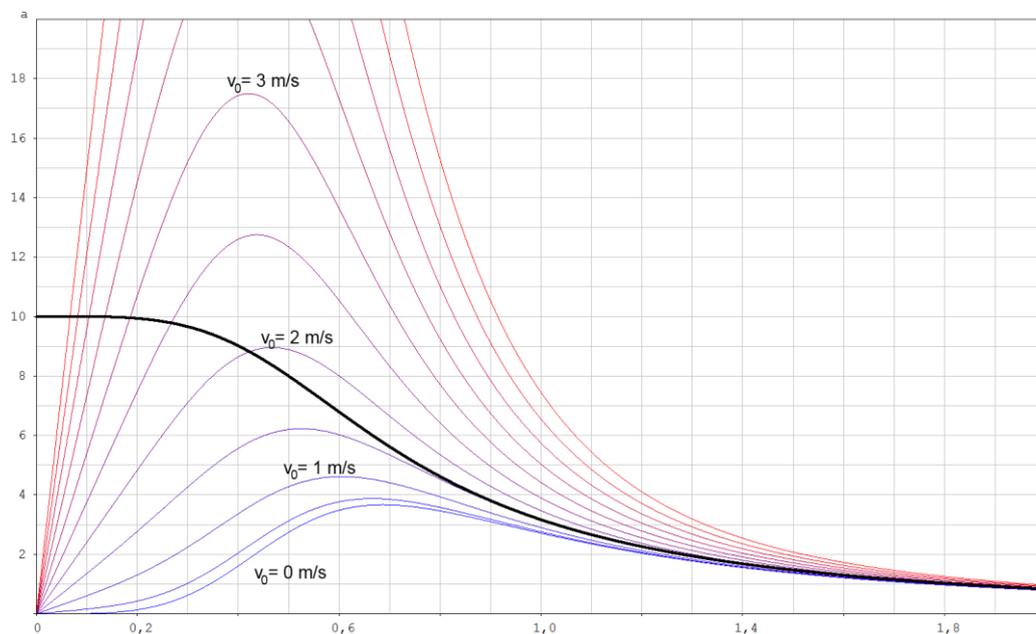
$$y'(x) = 3ax^2 \text{ und } y''(x) = 6ax$$

Eingesetzt in die allgemeine Abhebebedingung erhält man:

$$[v_0^2 + K \cdot g \cdot x^3] 6ax > [9a^2x^4 + 1] \cdot g$$

Bei unseren Versuchen werden wir wieder mit verschiedenen Anfangsgeschwindigkeiten experimentieren, jedoch lässt sich hier bereits feststellen, dass, egal wie hoch v_0 ist, die Kugel nie bei $x = 0 \text{ m}$ abheben kann. Für $x = 0$ ist die Ungleichung nämlich nicht erfüllt, weil die Krümmung dort 0 ist.

Dies lassen wir uns wieder mit Turboplot bestätigen. Darüber hinaus kann man aus den Graphen erkennen, dass für Geschwindigkeiten unter ca. $1,5 \text{ m/s}$ die Normalbeschleunigung überall größer ist als die Zentrifugalbeschleunigung. Die Kugel bleibt auf der Bahn. Bei höheren Geschwindigkeiten gibt es Ablösestellen.



3 Bahnenbau

3.1 Die flexible Bahn (Kunststoff)

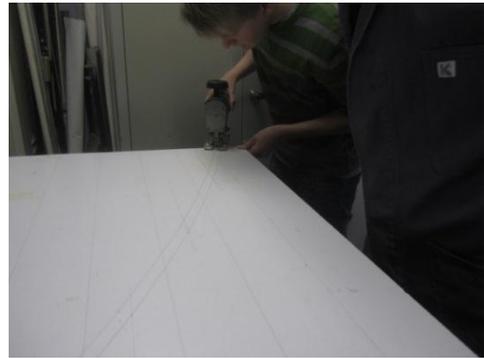
Für unsere erste Bahn nahmen wir eine in der Physksammlung unserer Schule vorhandene Stange aus biegbarem Kunststoff mit drei Vertiefungen (siehe Abbildung Abschnitt 4.2.3) und befestigten mit Schrauben Holzklötze an die Unterseite von dieser. In die Holzklötze bohrten wir Löcher, um die Bahn später über Verbindungsstücke auf Stangen montieren zu können. Diese Bahn konnten wir in sehr viele mögliche Formen verbiegen, jedoch stellten wir schnell fest, dass die gesamte Konstruktion sehr instabil war. Aufgrund des großen Abstands zwischen den Befestigungspunkten der Bahn kann



diese mitschwingen, wenn eine Kugel runterrollt. Dies hatte zur Folge, dass die Bahnform sehr von der theoretischen, über die Befestigungen geplanten, Form abweicht und somit Berechnungen mit dieser Bahn nicht verlässlich überprüft werden konnten. Wir experimentierten während eines Großteils unserer Versuchszeit mit dieser Bahn, konnten das Problem jedoch nur unzureichend über zusätzliche Befestigungen lösen. Dies veranlasste uns letztendlich zum aufwändigeren Bau einer festen Bahn.

3.2 Die feste Bahn (kubische Parabel)

Um verlässlichere Versuchsergebnisse zu erreichen, sägten wir eine vorher definierte Bahnform aus einer Holzplatte (1.1m*1.1m*16mm). Wir wählten eine kubische Parabel ($y(x) = \frac{1}{m^2}x^3$), bei $x = 0m$ beginnend aus und berechneten vor dem Sägen Punkte der Bahn, um sie auf der Platte zu markieren. Da auch hier die Kugel aufgrund einer Kunststoffstange mit U-Profil, die wir auf das Holz schrauben würden, nicht direkt auf der gesägten Bahn läuft (Abstand von der Holzseite zum Mittelpunkt der Kugel 1.8cm), aber



die Kugel auf der Bahn $y(x) = x^3$ laufen soll, mussten wir die Punkte senkrecht zur jeweiligen Tangente der Bahn um 1.8cm nach außen verschieben. Mit einer Stichsäge und Schleifmaschine konnten wir somit eine Bahn konstruieren, welche stabil war und somit verlässlichere Ergebnisse produzieren sollte. Einen Teil der Kunststoffstange ließen wir am Anfang der Holzplatte überstehen, um diese in die Höhe biegen und so der Kugel eine Anfangsgeschwindigkeit v_0 geben zu können.

3.3 Die feste Bahn (Kreis)

Da sich herausstellen sollte, dass Abhebepunkte bei niedrigen Anfangsgeschwindigkeiten vor allem beim Kreis deutlich erkennbar sein müssten, entschieden wir uns zu Ende des Jugendforscht Projektes, aus einer Holzplatte noch einen Viertelkreis zu sägen und gingen dabei ähnlich wie bei der kubischen Parabel vor. Die Kreisform war somit deutlich korrekter und stabiler als bei unseren Versuchen mit der flexiblen Bahn. Daraus erhofften wir uns genauere Messergebnisse.

4 Messverfahren

4.1 Geschwindigkeitsmessung

Da bei unseren Berechnungen die Geschwindigkeit der Kugel wesentlich einfließt, mussten wir die in Abschnitt 2.1.4 hergeleitete Formel für die Geschwindigkeit praktisch überprüfen. Zu diesem Zweck montierten wir auf den verschiedenen Bahnformen zwei nahe beieinanderliegende Lichtschranken, welche mit einer elektronischen Uhr verbunden waren. Diese maß die Zeit, die die Kugel benötigte, um die Strecke zwischen den Lichtschranken zu durchqueren. Dabei beobachteten wir unter Berücksichtigung von Messungenauigkeiten ziemlich genau die theoretische vorhergesehene Geschwindigkeit. Offensichtlich sind die Energieverluste durch den Rollreibungswiderstand vernachlässigbar. Unsere Überlegungen zur Energieerhaltung und die daraus resultierende Formel wurden durch die Experimente bestätigt.

4.2 Methoden zur Bestimmung der Abhebestelle

4.2.1 Methode der subjektiven Wahrnehmung

Zunächst versuchten wir, die Abhebestelle mit den Augen zu erkennen. Dies scheiterte jedoch an den zu schnellen Abläufen und den zunächst zu geringen Abhebehöhen, da sich die Zentrifugalbeschleunigung meist nur langsam durchsetzt und die Kugel häufig über längere Strecken nur um Bruchteile eines Millimeters abhebt. Es ist nicht möglich, mit den bloßen Sinnen die Abhebestelle auch nur einigermaßen genau festzustellen. Berechnungen der Abhebehöhen bei einer Kreisbahn bestätigten diesen Eindruck.

4.2.2 Videoaufnahmen

Als nächstes versuchten wir, mit Videoaufzeichnungen einer guten Kamera den Ablösepunkt festzustellen. Jedoch ließ sich dies selbst mit der besten Kamera, die die Schule hatte, nicht durchführen. Entweder war die zeitliche Auflösung der Kamera zu gering oder die Auflösung der Bilder. Auch war erneut die über größere Strecken sehr geringe Höhe der Kugelflugbahn über der Rollbahn ein Problem, da sich die Kugel in einer Vertiefung bewegt und ihr Abheben dadurch noch schlechter zu beobachten ist.

4.2.3 Stromkreis

Ein Gedankengang zur genauen Ermittlung der Abhebestelle war die Ausnutzung der Leitfähigkeit einer Stahlkugel. Wir beklebten die oberen Bereiche der Bahn mit Aluminiumklebeband, sodass zwei nicht verbundene Bereiche aus Aluminiumklebeband entstanden. Diese waren leitend und wurden durch Krokodilklemmen mit einer Spannungsquelle verbunden. Die aufliegende Kugel würde den Stromkreis schließen. Würde die Kugel abheben, wäre der Stromkreis geöffnet, was mit einem Strommessgerät messbar sein würde. Das Verfahren schien uns zunächst vielversprechend, da lediglich das Vorhandensein eines Stroms und nicht sein Wert entscheidend ist.

Zu diesem Zweck filmten wir den Vorgang und ließen den Strom durch eine LED, da diese schneller reagieren als zum Beispiel Glühlampen, fließen. Beim Abheben sollte die LED ausgehen, auf der Videoaufnahme ließe sich dann die Abhebestelle erkennen, indem man das erste Bild, in dem die LED nicht mehr an wäre, suchte.

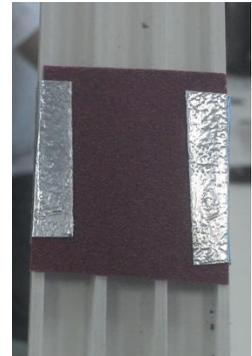
Jedoch werden die beiden Schienen von der Kugel nur auf einer sehr kleinen Fläche berührt, was zu einem hohen Widerstand führt. Auch führen die vergleichsweise hohe Geschwindigkeit (wir erreichten bei den Experimenten Geschwindigkeiten von mehreren Metern pro Sekunde) und die schräge Lage der Bahn mit einer geringeren Normalkraft und der nach außen wirkenden Zentrifugalkraft zu einem schlechten Kontakt. Dies äußerte sich so, dass es wiederholt elektrische Verbindungen und Stromkreisunterbrechungen gab, die wir auf einem Oszilloskop sichtbar machen konnten. Auch unsere Versuche mit Salzwasser zeigten keinen Erfolg. Wir bestrichen die Bahn mit Salzwasser, was auch beim Rollen in der Horizontalen zu einem gut



messbaren Strom führte. Im Feldversuch mit einer höheren Geschwindigkeit und einer schrägen Bahn war der Übergang vom Rollen zum Fliegen der Kugel wieder nicht eindeutig nachweisbar.

4.2.4 Geräusch

Auch bei dieser Methode mussten wir uns auf unsere subjektive Wahrnehmung verlassen. Wir befestigten Schmirgelpapier auf der Bahn, sodass, wenn die Kugel noch nicht abgehoben hat, diese mit dem Papier kollidieren musste. Die Tatsache, dass es sich um Schmirgelpapier handelte, verstärkte den auditiven Effekt. Die Kugel erzeugte dabei eine Art Ratschen. Wir mussten jedoch oft sehr genau hinhören und stießen auch hier schnell an Grenzen der Wahrnehmung. Zudem lag das Schmirgelpapier auf den Schienen auf. Daher hörte man auch noch etwas, wenn die Kugel bereits abgehoben war. Die Geräusch-Methode eignete sich somit nur für eine grobe Einschätzung über die Abhebestelle. Sie war uns aber trotzdem als eine recht unaufwändige Methode bei den Versuchsreihen immer wieder behilflich.



4.2.5 U-Brücke

Bei dieser Methode fixierten wir eine Klammer als U-Brücke über der Bahn und justierten deren Position so, dass die abgehobene Kugel beim Durchqueren anstößt und dies deutlich zu hören ist. Das hatte den Nachteil, dass dabei die Klammer beim Kontakt verschoben wurde und danach neu eingestellt werden musste. Obwohl unsere Hoffnung in diese simple Methode groß war und wir uns fragten, warum wir nicht früher auf diese Idee gekommen waren, war der akustische Effekt letztendlich nur gering. So hatten wir Schwierigkeiten einzuschätzen, ob die Kugel nun wirklich abgehoben hatte.



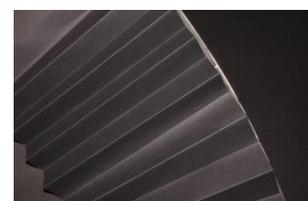
4.2.6 Fotos

Mit einer hochauflösenden Spiegelreflexkamera versuchten wir Bilder der Kugel während des Rollens zu machen. Um die Aufnahme zu erleichtern und die Kugel auch beim Auslösen im direkten Blick zu haben, benutzten wir einen Fernauslöser. Da der Durchgang der Kugel sehr schnell vonstattenging und wir das Blickfeld der Kamera auf bestimmte Stellen beschränken wollten, benötigten wir meist mehrere Versuche, um die Kugel im richtigen Moment zu erwischen. Nach einiger Zeit stellte sich bei uns dabei eine gewisse Routine ein, sodass uns scharfe Aufnahmen gelangen.

4.2.7 Stroboskopische Aufnahmen

Zu Ende des Projektes kamen wir noch auf die Idee, zusätzlich zu normalen Fotos mit Hilfe eines Stroboskops mehrere Positionen der Kugel auf einem Bild abzulichten. Zunächst dunkelten wir den Versuchsraum ab und befestigten schwarze gefaltete Pappe auf der Holzplatte, um störende Reflektionen zu vermeiden. Dann verwendeten wir ein Stroboskop und wählten die Frequenz 50Hz (Das heißt, alle 0,02 Sekunden wird ein Lichtblitz ausgesendet.) und wählten auf der Kamera eine genügend große Belichtungszeit von 0,25 Sekunden. Somit konnte die Kamera mehrere Positionen der Kugel in ihrem Blickfeld festhalten.

Bei dieser Methode benötigten wir weniger Versuche als bei Einzelfotos, jedoch waren jetzt die Positionen der Kugel aufgrund der Blitzdauer etwas unschärfer. Wie bei der Foto-Methode erhielten wir auch hierbei gute und zuverlässige Ergebnisse.



5 Experimente

5.1 Kreisbahn

Nun galt es unsere Berechnungen zu überprüfen. Die theoretische Abhebestelle beträgt beim Kreis ohne Anfangsgeschwindigkeit $x \approx 0,838m$ und $0,545m$ über dem Nullniveau. Nachdem wir mit der U-Brücke und dem Schmirgelpapier schnell und unkompliziert den Abhebebereich eingrenzen konnten, machten wir zunächst an der erwarteten Stelle (roter Strich an der Bahnkante) beim Durchlauf der Kugel Fotos. Das Bild rechts zeigt die Kugel im bewegten Zustand. Das Abheben ist deutlich ersichtlich. Die Kugel hat sich nicht nur bereits aus der Vertiefung erhoben, sie hat sich sogar merklich über die Oberkante der Schiene distanziert. Dies bedeutet, dass sich die Kugel bereits vor der erwarteten Stelle von der Bahn abgelöst haben musste.



Daher untersuchten wir Stellen, die noch weiter oben auf der Bahn lagen. Bei einem Wert $0,755m$ über dem Nullniveau war die Kugel, wie an den Bildern ersichtlich wird, noch nicht abgehoben. Wir maßen dazu bei der Auswertung der Bilder am Computer ab, wie lang der noch in der Vertiefung liegende Teil der Kugel im bewegten und im ruhenden Zustand war. In diesem Fall ist auf beiden Bildern kein Unterschied feststellbar.



Bei $0,69 m$ über dem Nullniveau konnten wir ein Abheben feststellen. Nun stellte sich uns aber die große Frage, wie diese Abweichung von der Theorie zu erklären ist. An unserer Formel sahen wir keinen Fehler.



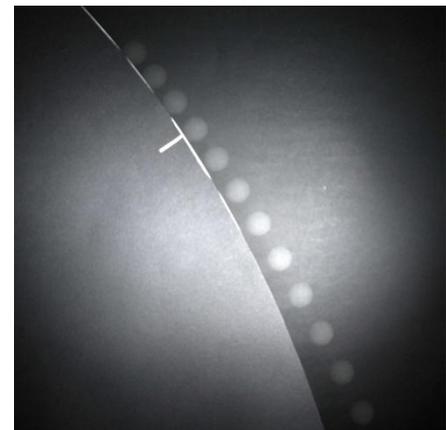
Als Grund für diese Abweichungen vermuten wir, dass die Kugel nur dann weitere Rotationsenergie aufnimmt, wenn sie stark genug auf den Untergrund gepresst wird. Wird sie nicht stark genug angepresst, erhöht sich bei der weiteren Bewegung nur noch ihre Translationsenergie. Die Kugel wird dadurch stärker beschleunigt und hebt früher ab.

5.1.1 Aufnahmen mit Stroboskop und Kamera

Bestätigt wurden unsere Ergebnisse mit zusätzlichen fotografischen Aufnahmen unterstützt durch ein Stroboskop. Wieder starteten wir die Kugel am höchsten Punkt der Kreisbahn. Wir erhielten z.B. acht verschiedene Positionen der Kugel auf einem Bild. Durch Bearbeiten der erhaltenen Bilder mit zusätzlicher Helligkeit und stärkerem Kontrast wurden die jeweiligen Positionen noch deutlicher sichtbar. Auch hier ließ sich die Sehne der Kugel, also die Länge des Teils der Kugel, welcher sich noch in der Vertiefung befand, abmessen. Zudem ließ sich die Geschwindigkeit der Kugel berechnen. Da die zeitliche Differenz aufgrund der festgestellten Frequenz immer 0,02 Sekunden betrug, konnten wir mit dem Abstand zwischen zwei Position die Durchschnittsgeschwindigkeit der Kugel berechnen. Bei der theoretisch berechneten Abhebestelle kamen wir so auf eine Geschwindigkeit $v \approx 2,7 \text{ m/s}$. Diese liegt deutlich höher als theoretisch mit $v = \sqrt{Kgh} \approx 2,3 \text{ m/s}$ erwartet. Das stützte unsere obige Erklärung.



Bei einer großflächigeren Aufnahme mit höherer Stroboskopfrequenz war das Abheben der Kugel noch deutlicher zu erkennen. Der weiße Strich markiert die theoretisch berechnete Abhebestelle.



5.2 Parabelbahn

Bei einer Parabel in der Form $y(x) = ax^2$ hebt die Kugel rein rechnerisch gesehen abhängig von der Anfangsgeschwindigkeit entweder direkt zu Beginn am Scheitelpunkt oder gar nicht ab. Somit sind bei Experimenten mit einer Parabelbahn keine Bestätigungen oder Widerlegungen unserer Ergebnisse zu erwarten und wir verzichteten deshalb auf das Aussagen einer Parabelbahn.

5.3 Kubische Parabelbahn

Für eine kubische Parabel in der Form $y(x) = ax^3$ sind in Abhängigkeit von der Startgeschwindigkeit Abhebestellen zu erwarten. Wir führten mit der U-Brücke-Methode (Abschnitt 4.2.5) eine Messreihe

für verschiedene Abhebestellen durch. Zu jeder Abhebestelle bestimmten wir die erforderliche Beschleunigungshöhe. Die x-Koordinate der Abhebestelle wurde aus der y-Koordinate durch Umstellen der Funktionsgleichung zu $x = \sqrt[3]{\frac{y}{a}}$ berechnet. Die theoretisch notwendige Beschleunigungshöhe wurde durch das Umstellen der Abhebebedingung (Abschnitt 2.1.5.1) nach h_0 und das Einsetzen der Funktion und ihrer Ableitungen errechnet. Dies liefert folgende Formeln:

$$h_0 = \frac{(y'(x))^2 + 1}{K \cdot y''(x)} - y(x)$$

$$= \frac{9a^2 x^4 + 1}{6Kax} - ax^3$$

Als Werte wurden $K = 1,2$ und $a = 1/m^2$ benutzt.

x-Koordinate (aus y berechnet) x [m]	y-Koordinate y [m]	Gemessene Beschleunigungshöhe $h_0, \text{ gemessen}$ [m]	Theoretisch mit x berechnete Beschleunigungshöhe $h_0, \text{ theoretisch}$ [m]
0,510	0,133	0,153	0,305
0,543	0,160	0,135	0,296
0,580	0,195	0,067	0,288
0,599	0,215	0,050	0,286

Wie man sieht, liegen die gemessenen und berechneten Werte für die Beschleunigungshöhen weit auseinander. Dies passt zu den Ergebnissen, die wir an der Kreisbahn gemessen haben.

Hinweis: Als wir die Experimente an der kubischen Parabelbahn durchführten, hatten wir die Stroboskopmethode für uns noch nicht entdeckt. Wir konnten die Stroboskopmessungen auch nicht nachholen, da wir aus der Holzplatte inzwischen die Kreisbahn herausgesägt hatten.

6 Evaluation

6.1 Auswertung

Es ist uns gelungen, für rollende und gleitende Körper auf einer beliebigen, fallenden Bahn eine Abhebebedingung herzuleiten. Diese Abhebebedingung wendeten wir auf konkrete Bahnen an: Viertelkreis, Parabel und kubische Parabel. Dabei berücksichtigten wir auch eine Anfangsgeschwindigkeit, die der Körper im Startpunkt (z.B. Scheitelpunkt) besaß.

Bei einer Kreisbahn hebt eine Kugel stets ab, gleichgültig wie groß ihre Anfangsgeschwindigkeit ist. Wir bauten eine kreisförmige Bahn und bestimmten die Abhebestellen experimentell. Dabei stellten wir fest, dass die Kugel früher abhebt als berechnet. Wir erklärten dies dadurch, dass die Kugel schon vor der Abhebestelle wegen zu geringer Reibung zwischen ihr und der Bahn keine Rotationsenergie mehr aufnimmt und deshalb stärker beschleunigt wird, als in der Theorie berücksichtigt. Mit Stroboskopaufnahmen konnten wir die Geschwindigkeiten messen und feststellen, dass die Kugel schon vor der berechneten Abhebestelle eine Geschwindigkeit erreicht, die größer ist als die berechnete Abhebebeschleunigung.

Wir bauten eine kubische Parabelbahn und stellten fest, dass dieser Effekt im Vergleich zur Kreisbahn noch ausgeprägter ist, da die kubische Parabelbahn nicht stark von einer Wurfparabel abweicht und dadurch die Reibung zwischen Kugel und Bahn noch schneller klein wird. Wir berechneten außerdem, dass es bei einer kubischen Parabel oberhalb einer gewissen Anfangsgeschwindigkeit (im Scheitelpunkt) Abhebestellen gibt.

Wir fanden theoretisch heraus, dass es bei einer Parabelbahn keine Abhebestellen unterhalb des Scheitelpunkts geben kann. Experimente an einer Parabelbahn erübrigten sich deshalb.

6.2 Reflexion

Es ist überraschend, wie leicht alltägliche Fragestellungen, die auf der eigentlich unkomplizierten Mechanik basieren, auf komplexe mathematische und physikalische Probleme führen. Man denke hierbei nur an den Ausdruck für die Krümmung, der weit über die Schulmathematik hinaus geht oder das Problem der Berechnung der Geschwindigkeit unter Berücksichtigung der Rotation der Kugel. Als wir mit dem Projekt begannen, wussten wir nur sehr vage über Rotationsenergie und die Möglichkeiten zur Einbeziehung derselben Bescheid. Erst im Laufe des Projektes begannen wir uns damit zu beschäftigen, hatten auch über weitergehende Fragestellungen wie den Einfluss der Vertiefung auf die Geschwindigkeit und nicht homogener Masseverteilungen sowie der Messung dieser Einflüsse nachzusinnen. Alle diese Einflüsse mathematisch nachzuvollziehen artete wieder in komplexe Gleichungen aus, die man bei dieser einfachen, für unser eigentliches Problem nachgeordneten Fragestellung nicht erwartet hätte.

Besonders interessant wäre es noch gewesen, Spezialfälle wie Funktionen mit linear steigender Krümmung oder sogar Funktionen, bei denen die resultierende Anpressbeschleunigung linear abnimmt, zu untersuchen. Diese Funktionen zu finden hätte jedoch Mathematik erfordert, die noch weiter über das Schulniveau hinaus geht und für uns einfach nicht machbar war.

Uns hat das Experimentieren sowie das vom normalen Unterricht unabhängige und deswegen lockere Klima dabei sehr viel Spaß gemacht. Auch fanden wir es sehr interessant, über eine solche Fragestellung nachzudenken, über die man normalerweise nicht wirklich nachdenken würde.

7 Danksagung

Wir bedanken uns bei unserem Betreuer Hr. Dr. Graubner, der uns mit seiner fachmännischen Kompetenz, seinem Engagement und seinen zahlreichen Ideen bei unserem Projekt stets zur Seite stand. Mehr als einmal konnte er uns in einer vermeintlichen Sackgasse auf die Sprünge helfen. Zudem bedanken wir für die reichhaltige Verpflegung bei unseren Treffen in den Weihnachtsferien, wo uns außerdem in seiner Werkstatt Platz und Materialien für unsere Experimente sowie den Bahnenbau zur Verfügung standen.

8 Literaturverzeichnis

- Das große Tafelwerk, Cornelsen 2011
- www.de.wikipedia.org/wiki/Krümmung
- www-user.tu-chemnitz.de/~hgi/Ue-3-LB-WS%2003.pdf

9 Bildquelle

- www-user.tu-chemnitz.de/~hgi/Ue-3-LB-WS%2003.pdf